INTRODUZIONE STORICA AL CONCETTO DI COGNIZIONE NUMERICA

Silvia Sbaragli - *N.R.D. Bologna*
DFA, SUPSI, Locarno (Svizzera)

Daniela Lucangeli - *Dipartimento di Psicologia dello Sviluppo e della Socializzazione – Università degli Studi di Padova*

Pubblicato in: Sbaragli S., Lucangeli D. (2010). Introduzione storica al concetto di cognizione numerica. In: Lucangeli D., Mammarella I.C. (2010). *Psicologia della cognizione numerica. Approcci teorici, valutazione e intervento.* Milano: Franco Angeli.

1 Breve storia del numero[1]

Capire la quantità, distinguere l'uno dalla ripetizione, dal molteplice, arrivare a stabilire "di più", "di meno",… tutto ciò fa parte delle competenze più elementari della natura, in dotazione organica intellettuale di molti animali, oltre all'uomo: delfini, cetacei, cavalli, cani, cornacchie e perfino galline vi sanno accedere.
Ma ben presto l'essere umano ha imparato a fare di più, ha imparato a fare tacche sul bastone, ha creato nomi per i numeri, poi ha ideato simboli per essi. Per tutto quel tempo in cui gli uomini non elaborarono simboli scritti (i numeri scritti più antichi che si conoscano sono incisi su tavole di pietra e risalgono al 4000 a.C.), oltre che vocali, per comunicare, non abbiamo testimonianze che ci precisino come e in che misura si affacciò alla ribalta della preistoria il pensiero matematico.
Il *contare* è un fatto che a noi sembra, oggi, del tutto istintivo; ma vi fu un tempo in cui l'essere umano non sapeva contare, né immaginava che si potesse fare o che avesse un senso. Un'analogia è data dal fatto che ancora

---

[1] Questo paragrafo è tratto da un libro in elaborazione di D'Amore e Sbaragli (2011). Consigliamo anche il testo di Ifrah (1989) per un approfondimento.

oggi esistono uomini che non riescono a concepire nessun tipo di numero astratto. È verosimile, però, che una situazione analoga a quella che avviene oggi per un bambino che impara spontaneamente a confrontare insiemi associando ad essi un numero che li metta in relazione, si sia presentata ai tempi degli uomini delle caverne, o prima ancora. Non abbiamo comunque testimonianze cui fare appello.

L'invenzione dell'idea di numero è nata sicuramente da esigenze pratiche, utilitaristiche e concrete. Gli addetti alla cura dei greggi dovevano assicurarsi che gli animali fossero rientrati tutti all'ovile; coloro che catalogavano gli utensili, le armi, i viveri dovevano tenere una qualche testimonianza degli oggetti assemblati; coloro che barattavano merci dovevano poterle valutare quantitativamente durante lo scambio,...
Da questa esigenza di contabilità nasce forse la *corrispondenza uno a uno*, detta *biunivoca*, che permette di confrontare la numerosità di due raccolte di oggetti, senza far ricorso ad un procedimento astratto quale il conteggio, la nominalizzazione delle quantità, o la conoscenza delle quantità implicate. Fu proprio grazie a questa corrispondenza che l'uomo preistorico, nel corso di parecchi millenni, riuscì ad avere a che fare con l'aritmetica, ben prima di creare l'idea di numero astratto.
Sfruttando delle tecniche concrete come la pratica degli intagli, gli uomini primitivi riuscivano a tenere la contabilità. Basta immaginare un pastore che sorveglia un gregge di pecore e che, per controllarle al rientro nella caverna, le fa entrare una alla volta; per ciascuna che gli passa davanti, pratica con una selce una tacca su un bastone, oppure tiene il bastone saldamente in mano e fa scorrere l'unghia del pollice sulle tacche, una per ogni bestia rientrata. In questo modo, potrà controllare ogni giorno, valutando ad una ad una ciascuna pecora, se il suo gregge è al completo.
La corrispondenza biunivoca ha la proprietà di non tener conto della natura degli oggetti dei due insiemi considerati, compiendo così un'azione astratta, che esprime una caratteristica comune alle due raccolte in questione. Così facendo, con 15 tacche su un bastone è possibile considerare raccolte di 15 pecore, 15 vasi, 15 frecce,…, indipendentemente dunque dal tipo di oggetti specifici della raccolta.
Questo metodo è sicuramente uno dei più antichi; le prime testimonianze archeologiche note di tale pratica risalgono al 35.000 - 20.000 a.C. Si tratta del ritrovamento di diverse *ossa*, recanti una o più serie di *incisioni regolarmente separate*, rintracciate prevalentemente nell'Europa occidentale (vedi Figura 1).

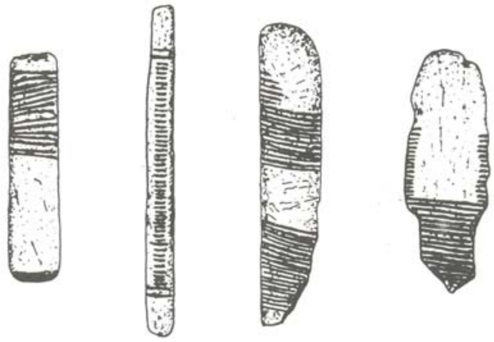

Figura 1. Ossa intagliate del Paleolitico superiore (35.000 - 20.000 a.C.)

È ovvio che chiunque, avendo bisogno di contare, si servirebbe di un bastone, piuttosto che in un osso, più facile da trovare e da intagliare con una pietra scheggiata. Il ricorso all'osso segna dunque un passaggio molto tardo, legato di certo ad una pratica ripetuta, nella quale c'è bisogno di una certa stabilità dello strumento. L'aver ritrovato ossa intagliate da calcolo del 35000 a.C. ha spinto antropologi di una certa fama ad azzardare la possibilità che l'essere umano abbia iniziato ad intagliare bastoni per farne macchine da conteggio almeno nel 60000 a.C., c'è chi si spinge anche più lontano.
Invece di utilizzare tacche realizzate su ossa, è possibile effettuare la stessa operazione servendosi di una raccolta di sassi, di conchiglie, di bastoncini, di semi, di zanne,… di cui i nostri progenitori facevano mucchi o file, corrispondenti alla quantità di esseri o di oggetti che volevano enumerare. Lo stesso poteva avvenire tramite nodi in cordicelle, o sgranando perle o conchiglie in una sorta di rosario.
A questo scopo, viene spontaneo servirsi delle *dita delle mani, degli arti e delle diverse parti del corpo umano,* come è in effetti avvenuto storicamente per diversi popoli nel Medioevo, sia in Europa, sia in Asia (Ifrah, 1989).
Questi popoli conoscevano intuitivamente la corrispondenza biunivoca e facevano ricorso solo a gesti consecutivi consistenti nell'aggiungere o nell'eliminare una o qualcuna delle unità di un insieme iniziale. Essi non avevano quindi nessun bisogno dell'idea astratta del numero dieci, ma sapevano che toccandosi in sequenza il mignolo, l'anulare, il medio, l'indice e il pollice della mano destra, quindi il polso, il gomito, la spalla, l'orecchio e l'occhio dallo stesso lato, potevano elencare una raccolta costituita da dieci oggetti, ossia tanti quanti i riferimenti corporei di questa successione (vedi Figura 2).

Figura 2: Sistema di conteggio basato sulle parti del corpo umano

Nessuno di tali riferimenti corporei veniva dunque visto da questi popoli quale numero; ossia, la semplice designazione di una parte del corpo non bastava a caratterizzare una certa quantità di esseri o di oggetti se questa non era corredata da una sequenza di gesti corrispondenti. La cosa si evolverà nel tempo; successivamente, le parti del corpo rappresenteranno *numeri* ben precisi, per cui la possibilità di conteggio si amplierà immensamente.

I metodi legati alle parti del corpo sono da considerarsi un'evoluzione culturale rispetto a procedimenti elementari come la pratica dell'intaglio o l'accumulo di sassi, perché non utilizzano solo il principio della corrispondenza biunivoca, ma introducono anche la *nozione di successione*, nella quale è presente la *nozione di ordine*. In effetti, a forza di considerare la stessa sequenza di parti del corpo prestabilite, prima o poi questa successione finisce per diventare, grazie all'abitudine e alla memoria, sempre più astratta, ossia sempre meno legata a parti del corpo, ma più legata a una successione di numeri.

Per quanto riguarda i *nomi dei numeri*, ai primordi della storia dell'uomo, quando le quantità venivano finalmente indicate con un suono di voce, quelli che per noi sono numeri avevano nomi diversi a seconda del tipo di oggetti cui si riferivano. Per cui, il "due" di "due banane" era diverso dal "due" di "due pietre" per il semplice fatto che la qualità di banane e pietre è essenzialmente diversa. Questo punto è testimoniato da vari antropologi.
È un passaggio di astrazione, chissà quanto lontano nel tempo, quello in cui l'essere umano ha capito che poteva usare un solo nome, "due", per indicare qualsiasi tipo di oggetti, ossia che in "due banane" e in "due pietre" vi è qualche cosa in comune che chiamiamo *quantità*. Un'astrazione folgorante che ha portato alla ricerca dei nomi di numeri, indipendentemente dalla qualità degli oggetti contati.
Sappiamo oggi che questi nomi venivano cercati associandoli a qualche cosa che li ricordava concretamente; ad esempio, il nome "due" veniva preso a prestito da qualche cosa che si presenta sempre a coppie in natura, poteva quindi dirsi "occhi".

Uno dei primi *sistemi di numerazione* di cui si è a conoscenza è basato sull'*uno*, il *due* e il *molto*. Il considerare solamente queste grandezze numeriche, non è specifico solo di quel periodo storico; ancora oggi le lingue originali di diverse popolazioni ricordano questo sistema di numerazione. Quindi, uno e due rappresentano i *primi concetti numerici astratti intellegibili dell'essere umano.*
Tra le attuali culture in cui la lingua conserva ancora tracce di queste sole grandezze numeriche, l'uno è considerato spesso la testa, il due gli occhi o le gambe, dal tre in poi si considera il molto. Tra questi popoli, alcuni riescono ad esprimere anche il tre e il quattro, unendo il due-uno e il due-due, ma qui la lingua si perde e cambia radice. Di solito, il cinque si dice "mano" (D'Amore, 1992). Le analogie con quel che avviene nella evoluzione aritmetica della prima infanzia sono lampanti.
Il numero tre è quindi sempre stato sinonimo di pluralità, moltitudine, dell'al di là, una sorta di limite invalicabile.
In molti altri casi, invece, ci si ferma al cinque, essendo le quantità superiori difficili da essere distinte le una dalle altre; a tal punto che diversi popoli dal cinque in poi indicano la propria capigliatura nel senso di: «Tanto quanti sono i capelli che ho in testa».
La *base cinque* è in effetti molto presente nei sistemi di numerazione.
L'uso delle *dita delle mani* rappresenta ancora oggi uno strumento per

iniziare a contare; per questo in molte lingue si possono rintracciare tracce di tale origine antropomorfa della facoltà di conteggio.
Sono proprio le dieci dita delle mani ad aver imposto all'uomo l'idea dei raggruppamenti per insiemi di dieci, ed è per questo che anche tale base occupa nelle numerazioni antiche e moderne un posto importante.
Le dieci dita della mano sono sempre servite all'essere umano per apprendere i primi dieci numeri e le tecniche di aritmetica elementare; non è certo un caso che ancora oggi i bambini che iniziano a contare e ad effettuare le prime operazioni sfruttino questo strumento o che gli adulti si aiutino con questi gesti per accompagnare il loro pensiero. Tra le tecniche corporee del numero, il ricorso alle dieci dita delle mani ha quindi svolto e svolge tuttora un ruolo determinante e può essere considerata come la più semplice macchina calcolatrice impiegata da tutte le popolazioni nel corso delle ere (vedi Figura 3).

Figura 3: Il calcolo con le dita nell'Egitto faraonico. Pitture risalenti al XV secolo a.C.

Grazie all'autonomia, specificità e mobilità delle dita, la mano può essere vista come una *successione di unità astratte*, ottenute ricorsivamente a partire dalla prima aggiungendo ogni volta un'unità. La mano consente di passare in modo immediato dall'*aspetto ordinale del numero* (piegando o elevando le dita), a quello *cardinale* (elevando tutte le dita corrispondenti al numero cardinale) e viceversa.
Inoltre, tale "strumento", non è servito solo per contare, ma anche ad effettuare diverse *operazioni aritmetiche*. Questa antichissima tradizione è ancora oggi rintracciabile in India, Iraq, Siria, Serbia, Nord Africa… In Europa, questo genere di calcolo con le parti del corpo, in particolare digitale, si è perso definitivamente nel Rinascimento, con l'ingresso massiccio degli algoritmi posizionali e soprattutto di carta a buon mercato e strumenti per scrivere abbastanza agevoli. Inoltre, la mano, prima supporto concreto del calcolo, costituisce solo una fuggevole modalità di

registrazione del concetto numerico, che non soddisfa la necessità di conservare in maniera duratura il ricordo in un computo.
Sono quindi proprio le dieci dita della mano ad aver imposto all'uomo l'idea dei raggruppamenti per insiemi di dieci, di cinque (per chi considera una sola mano), di quindici (due mani e un piede) o di venti (due mani e due piedi) ed è per questo che tali basi hanno avuto il sopravvento su tutte le altre. Va comunque ricordato che nella storia della matematica sono molto presenti anche la base dodici, assai più comoda della dieci per fini commerciali, essendo il 12 divisibile per 2, 3, 4 e 6 e la base sessagesimale di origine sumera che ancora oggi viene utilizzata per l'ampiezza degli angoli o per la misura del tempo.

La storia della matematica risulta molto complessa e varia (per un approfondimento si vedano Bagni, 1996; Boyer, 1976; D'Amore e Matteuzzi, 1976; D'Amore e Sbaragli, 2011).
Le tappe successive principali dell'evoluzione della cognizione numerica possono essere riassunte nelle seguenti fasi.
Il primo *sistema posizionale* a basi miste (sessagesimale e decimale) che si conosca è circa del 3000 a.C. e risale ai Sumeri e si fondava su un criterio additivo. Tale sistema fu assunto in seguito dai Babilonesi, ma si perdette, tanto che Egizi, Greci, Etruschi, Romani,... non ne possedettero uno. Un vero e proprio sistema numerico posizionale a base dieci fu creato in India nel 500 ed arrivò presso gli Arabi nell'800. Giunse in Europa, in Italia, solo nel 1202. Un sistema numerico perfettamente posizionale a base venti e che faceva uso dello zero fu ideato dai Maya, ma ne è incerta la data; c'è chi dice che era già presente nel IX secolo, altri lo pongono ancora prima.
Per quanto riguarda le *operazioni aritmetiche*, tracce scritte sono state trovate in tavole di argilla del 4000 a.C.; mentre operazioni già molto elaborate si trovano in papiri egiziani del 1800 a.C. A quei tempi non c'erano simboli per le operazioni e tutto si scriveva a parole. Questo fatto e la mancanza di sistemi posizionali rendeva molto complicate le operazioni; questo durò per tutto il Medioevo fino al Rinascimento. I segni oggi usati per le operazioni sono nati nel XVI e XVII secolo, in Francia; mentre il segno di uguale fu inventato nel XVIII secolo in Inghilterra.
Le *proprietà delle operazioni elementari* erano già note agli antichi Egizi, dato che essi le usavano per fare certe operazioni che appaiono in papiri del 1800 a.C.
La storia dell'oggetto *"zero"* risulta lunga, controversa e complessa (D'Amore e Fandiño Pinilla, 2009). Nel nostro attuale sistema, 0 è una vera e propria cifra, mentre nella storia della matematica il segno introdotto per lo zero voleva inizialmente solo dire "assenza" e non aveva funzione di

numerale. Questo avvenne ad esempio per il già citato sistema additivo-posizionale dei Sumeri prima e dei Babilonesi poi, dove ebbero bisogno di un segno speciale per separare le cifre, cioè per indicare posti vuoti. Può sembrare una differenza da poco, ma non lo è: accettare un segno specifico numerale che indica vuoto o nulla o assenza come una vera e propria cifra che indica un segno numerale, è un vero atto di coraggio culturale, filosofico. Non sappiamo quando questo fatto avvenne, ma ci sono documenti del 200 a.C. in cui appare un segno per indicare l'assenza delle cifre, ma tale segno non è ancora una cifra. Neppure i Greci, i più grandi matematici della storia, concepirono lo zero come numero; i loro numeri partivano da due, dato che per essi "il numero è molteplicità"; dunque anche l'uno non è un numero.
Lo zero appare in modo esplicito, sia come glifo sia come simbolo, nell'aritmetica posizionale a base venti dei Maya e fu concepito in modo maturo in India, la terra dell'idea di *nirvana*, l'ultimo stato della perfezione cui tende l'uomo nelle tre grandi religioni indiane (buddhismo, giainismo e induismo, per quanto differenziato in ciascuna di esse). Più precisamente, lo zero appare come cifra in India nel VI secolo ed entra in modo diffuso in Europa solo al momento di una revisione scolastica che iniziò nel 1277.
Dal punto di vista didattico, nella ricerca effettuata da D'Amore (2007) si è messo in evidenza grazie a colloqui con bambini fra i tre ed i sei anni, che la generazione dello zero, sia come cifra che come cardinale, è del tutto presente e spontanea. Si ipotizza dunque che all'origine delle difficoltà apprenditive di zero ci siano anche ostacoli didattici oltre a quelli epistemologici, creati dalla tendenza diffusa di evitare un'introduzione spontanea di tale concetto, basata sull'esperienza già esperita dai bambini di quella età. Non è dunque lo zero in sé a costituire ostacolo, ma le convinzioni pseudo-didattiche al riguardo.
Tornando alla storia della matematica, intendere zero come numero, porta immediatamente all'idea dei *numeri negativi* ed all'accettazione di sottrazioni nelle quali il minuendo è minore del sottraendo, come 3-5; ciò, di conseguenza, comporta l'accettazione totale del fatto che, a maggior ragione, 3-3 è un numero, un vero e proprio numero, senza più dubbi. In effetti, i *numeri negativi* vennero inventati dagli Indiani attorno al VI secolo e poi gli Arabi li portarono in Europa. Essi però non scrivevano -3, bensì 3 in colore rosso.
L'idea di *frazione* appare esplicitamente su tavolette sumere del 4000 a.C., mentre una vera e propria teoria delle frazioni appare su papiri egizi del 1800 a.C. (Per un approfondimento della storia delle frazioni si veda Fandiño Pinilla, 2005).

La capacità di trattare *numeri generici con lettere* risale all'antichità, ma si è diffusa con vera e propria consapevolezza solo nel corso del XVI secolo, fra i matematici italiani e francesi dell'epoca. Tale capacità di generalizzare i segni dell'aritmetica ed in particolare di indicare numeri generici con lettere, sembra adatta a bambini della scuola primaria, fin dal III o IV anno o anche prima, se fatto in maniera opportuna ed in contesti utili.

2. In sintesi

Questo capitolo consente un vero e proprio tuffo nel passato che permette di rivivere le varie tappe dello sviluppo del concetto di numero a partire dai primi segni sui bastoni e sulle ossa utili per il conteggio o all'impiego di parti del corpo come sistema numerico, che hanno ampiamente condizionato lo sviluppo dei sistemi di numerazione (si pensi ai sistemi a base 5 o a base 10…). In seguito, viene trattato lo sviluppo del concetto di quantità astratta, scollegato da elementi concreti, ponendo in luce le resistenze delle varie culture nell'abbandonare completamente il riferimento concreto. Dopo aver trattato la numerazione e l'attribuzione di etichette nominali ai numeri, si passa alle proprietà delle operazioni ed al loro sviluppo, fino a giungere al concetto di zero come numero a tutti gli effetti e all'impiego e alla comprensione dei numeri negativi e delle frazioni. La storia evolutiva del bambino che apprende la matematica sembra ripercorrere tutta la storia dello sviluppo del concetto di numero dell'umanità. Questo capitolo vuole quindi sottolineare la necessità di non dimenticare la storia del numero quando si studia la matematica, quando si elaborano modelli che analizzano i processi cognitivi coinvolti nei vari aspetti di questa disciplina.

Bibliografia

1) Bagni G. T., *Storia della Matematica*, Volume 1 e 2, Pitagora, Bologna, 1996.
2) Boyer C., *Storia della matematica*, Isedi, Milano, 1976 [Ed. orig. USA, 1968].
3) D'Amore B., Numerali, numeri ed aritmetica nelle culture indigene centro e sudamericane, *Didattica delle scienze*, 158, 5-8, 1992.

4) D’Amore B., Lo zero, da ostacolo epistemologico a ostacolo didattico, *La matematica e la sua didattica*, 21, 4, 2007, 425-454.
5) D’Amore B., Fandiño Pinilla M.I., *Zero*. *Aspetti concettuali e didattici*. Erickson, Trento, 2009.
6) D’Amore B., Matteuzzi M., *Gli interessi matematici*, Venezia, Marsilio, 1976.
7) D’Amore B., Sbaragli S., *La matematica e la sua storia*. *Un viaggio coinvolgente nei meandri del tempo*, Giunti, Firenze, in stampa.
8) Fandiño Pinilla M.I., *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici*, Pitagora, Bologna, 2005.
9) Ifrah G., *Storia universale dei numeri*, Arnoldo Mondadori, Milano, 1989 [Ed. orig. in lingua francese, 1981).